Magische Zauberkugel (Lösung)

Das Rätsel

Man hat eine Tabelle mit Zahlen von 0 bis 99. Hinter jeder Zahl sind kryptische Zeichen. Man wählt eine Nummer und zieht die Quersumme der Zahl von derselben ab. Das Zeichen, das hinter der Zahl des Ergebnisses steckt, errät der Computer. Wie kann das möglich sein? Beim nächsten Versuch wechseln die Zeichen.

Behauptung

Das Symbol, das die Lösung ist, kommt immer bei bestimmten Zahlen vor. Der Benutzer erhält bei jeder Eingabezahl ein Ergebnis der Zahlenmenge.

Definition, Formel und Lösung

x ist die um Benutzer gewählte Zahl:

$$x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Durch Definition nur Zahlen von 0 bis 99:

$$-1 < x < 100$$

Schneidet man die letzte Stelle von x ab, soll man a(x) erhalten. Die Definition ist:

$$a(x) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Durch Definition nur 1-Stellig, da die Eingabezahl x nur maximal 2-Stellen haben kann:

$$-1 < a(x) < 10$$

Wir streichen von x die letzte Stelle durch Abrundung (Floor-Function) und erhalten a(x):

$$a(x) = \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor$$

b(x) ist die letzte Stelle von x. Definition:

$$b(x) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

b ist immer 1-Stellig:

$$-1 < b(x) < 10$$

Wir ziehen von x die ersten Stellen ab, um die letzte Stelle zu erhalten:

$$b(x) = x - 10 \cdot a(x) = x - 10 \cdot \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor$$

x setzt sich aus den ersten Ziffern und der Letzten zusammen:

$$x = 10 \cdot a(x) + b(x)$$

Die Quersumme q(x) wird jetzt noch benötigt. Definition:

$$q(x) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Da q(x) nur die Prüfsumme von 2 Stellen ist, ist der Wertebereich 0..18:

$$-1 < q(x) < 19$$

Da a(x) und b(x) hier nur jeweils 1 Stelle haben, können wir folgende Funktion verwenden:

$$q(x) = a(x) + b(x)$$

f(x) ist die Lösungszahl des Rätsels, wobei x die Benutzerwahl ist. Wir versuchen, eine Lösungsmenge zu finden. Das Ergebnis ist laut der Aufgabenstellung x minus der Quersumme q(x):

$$\begin{aligned}
f(x) &= x - q(x) \\
f(x) &= 10 \cdot a(x) + b(x) - [a(x) + b(x)] \\
f(x) &= 10 \cdot a(x) + b(x) - a(x) - b(x) \\
f(x) &= 10 \cdot a(x) - a(x) \\
f(x) &= 9 \cdot a(x) \\
f(x) &= 9 \cdot \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor
\end{aligned}$$

Für die Definitionen von x gilt die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{0,9,18,27,36,45,54,63,72,81\}$$

Die Zahlen der Lösungsmenge erhalten alle dasselbe Zeichen, das dann vom Computer „erraten“ wird. Der Benutzer errechnet bei allen Zahlen von 0 bis 99 einen Teil der Lösungsmenge.

Allgemeiner Fall (Zahlen über 99)

Im allgemeinen Fall, bei denen die Zahlen über 99 hinweg gehen, ändert sich die Definition von x:

$$\begin{gathered}
x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\
-1 < x < \infty
\end{gathered}$$

Außerdem ändert sich die Definition von a(x):

$$\begin{gathered}
a(x) \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\
-1 < a(x) < \infty
\end{gathered}$$

Wir benötigen nun eine allgemeine Quersummen-Funktion.

s(m, n) gibt unter Verwendung der Floor-Funktion von m die n'te Stelle aus:

$$s(m,n) = \left\lfloor \frac{m}{10^n} \right\rfloor$$

$$s(m,n) \in \mathbb{N}$$

$$-1 < s(m,n) < 10$$

$$-\infty < m < \infty$$

$$m \in \mathbb{N}$$

$$-\infty < n < \infty$$

$$n \in \mathbb{N}$$

Wir holen uns alle Stellen und zählen sie zusammen, um die allgemeine Quersumme zu bilden:

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s(x,n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{x}{10^n} \right\rfloor$$

$$q(x) \in \mathbb{N}$$

$$-1 < q(x) < \infty$$

Die Formel f(x) bleibt gleich:

$$f(x) = x - q(x)$$
$$f(x) = x - \sum_{n=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{x}{10^n} \right\rfloor$$

Wenn man die allgemeinen Definitionen betrachtet, stellt man fest, dass wenn man von einer Zahl die eigene Quersumme abzieht, man immer ein Element der 9er-Reihe enthält, jedoch mit Ausnahme der Zahlen 90, 189, 288, 387, 486, 585, 684, ...

Die allgemeine Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{0,9,18,27,36,45,54,63,72,81, \dots\} \backslash \{90,189,288,387,486,585,684, \dots\}$$

$$\mathbb{L} = \{x \mid (x \mod 9 = 0) \land (x \mod 90 \neq 0) \land (x \geq 0)\}$$

Anmerkungen

Quelle des Rätsels: http://www.messe-ideen.de/upload/magische-zauberkugel.swf

In der Quelle wird der Fall f(0..9) = 0 nicht miteinbezogen.

Zur Verwirrung des Benutzers kann das Lösungszeichen auch bei Zahlen vorkommen, die nicht in der Lösungsmenge stehen.

Verfasser

Daniel Marschall, info@daniel-marschall.de
Letzte Aktualisierung: 10. November 2008